Сенов М.А.[[1]](#footnote-1), Голяндина Н.Э.1

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОШИБОК ОЦЕНИВАНИЯ СИГНАЛА ПРИ ПОМОЩИ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО АНАЛИЗА СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА

В данной работе рассматривается задача выделения комплекснозначного сигнала из возмущенного сигнала методом комплекснозначного анализа сингулярного спектра (CSSA) [1,2]. В качестве возмущения рассматриваются случайный гауссовский шум и выброс. Теоретические результаты, касающиеся ошибок оценивания сигнала, можно получить на основе техники из теории возмущений, примененной в работе [3] для метода SSA. Данная техника позволяет оценить первый по величине возмущения порядок ошибок, но результаты, которые удается получить, носят ограниченный характер. Поэтому здесь мы представляем численные результаты относительно поведения ошибок оценивания сигнала, а именно, их сходимости к нулю при длине ряда, стремящейся к бесконечности, и соотношения полной ошибки Efull и первого порядка ошибки E1. Ошибку будем измерять как среднеквадратическое отклонение от сигнала, усредненное по точкам временного ряда.

Опишем рассматриваемые модели временного ряда *X = (x*1*,…,x*N*)* длины *N*, где *xn = sn + dn*. Будем рассматривать сигнал в виде *sn* = cos(2π*n*/10) + i cos(2π*n*/10 + φ). Случай φ = π/2 соответствует комплексной экспоненте. В качестве общего случая рассмотрим φ = π/4. Возмущение в виде случайного шума имеет вид *dn* = 0.1(ξ*n* + iζ*n*), где ξ*n* и ζ*n* – независимые случайный величины со стандартным нормальным распределением, i – мнимая единица. Возмущение в виде выброса в точке *k* имеет вид *dn* =10(1 + i) при *n = k* и 0 иначе. Метод CSSA для выделения сигнала имеет два параметра, длина окна *L* и ранг сигнала *r*. Ранг рассматриваемого сигнала в общем случае равен 2 за исключением особого случая комплексной экспоненты, когда он равен 1 [4]. Длина окна *L* может варьироваться от 1 до *N*/2, но она не должна быть слишком маленькой. Мы рассматриваем два случая, фиксированной длины окна, равной 20, и длины окна, равной половине длины ряда и стремящейся к бесконечности вместе с длиной ряда.

Численные результаты (в случае случайного шума ошибка оценивалась на основе 100 реализаций случайного ряда) представлены в табл.1. Ноль означает отсутствие сходимости, а 1 – ее наличие, при этом 1\* означает, что, судя по всему, разность ошибок практически равна нулю для любого *N*. Сходимость определялась на основе последовательности возрастающих длин временного ряда *N* = 50, 100, 400, 1600. Ошибка для сигнала с выбросом рассматривалась для двух случаев расположения выброса, на края (*k* = 3) и в середине ряда (*k = N/2*). Так как результаты по наличию сходимости не отличались, в столбцах, относящихся к выбросу, не будем указывать его расположение.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Сходимость | Шум, *L* = 20 | Шум, *L = N/2* | Выброс, *L* = 20 | Выброс, *L = N/2* |
| φ = π/2, E1-Efull | 1\* | 1 | 1 | 1 |
| φ = π/2, E1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| φ = π/2, Efull | 0 | 1 | 1 | 1 |
| φ = π/4, E1-Efull | 1\* | 1 | 1 | 1 |
| φ = π/4, E1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| φ = π/4, Efull | 0 | 1 | 1 | 1 |

Табл.1 Наличие сходимости ошибок оценки сигнала к нулю.

Таким образом, во всех случаях есть сходимость ошибки первого порядка к полной ошибке. Таким образом, во всех случаях теоретическое исследование ошибки первого порядка адекватно описывает поведение полной ошибки. Сходимость обеих ошибок к нулю имеет место во всех случая кроме случая фиксированной длины окна *L* и возмущения в виде случайного шума.

Дополнительное исследование поведения максимальной абсолютной ошибки показало, что она ведет себя так же, как и среднеквадратическое отклонение за исключением случая фиксированной длины окна *L* и возмущения в виде выброса. В этом случае максимальная абсолютная ошибка не стремится к нулю, хотя первый порядок ошибки по-прежнему адекватно описывает полную ошибку.

Ключевые слова: комплексный временной ряд, оценка сигнала, анализ сингулярного спектра, численное исследование.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-01-00067

**Список литературы**

1. Golyandina, N., Zhigljavsky, A. Singular Spectrum Analysis for time series. 2020, 2nd Edition. Springer.
2. Keppenne, C. L., Lall, U. Complex singular spectrum analysis and multivariate adaptive regression splines applied to forecasting the Southern Oscillation // Exp. Long Lead Forecast Bull., 1996, 5, 54-56.
3. Nekrutkin, V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals // Statistics and Its Interface, 2010, 3, 297-319.
4. Голяндина, Н., Некруткин, В., Степанов, Д.. Варианты метода "Гусеница"-SSA для анализа многомерных временных рядов // Труды II Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'03. Москва, 2003, c. 2139-2168.

1. Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9 [↑](#footnote-ref-1)